SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP HỆ THỨC TRUY HỒI ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN ĐẾM TỔ HỢP

Chuyên đề tổ hợp và toán rời rạc là một trong những nội dung khó trong chương trình thi chọn học sinh giỏi các cấp, đã có rất nhiều các tài liệu viết về nội dung này với nhiều cách tiếp cận khác nhau. Bài toán đếm tổ hợp là một dạng bài toán thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi, cùng với các bài toán tồn tại tổ hợp, bài toán tối ưu tổ hợp, ... Có nhiều cách giải quyết bài toán đếm như phương pháp song ánh, phương pháp hàm sinh, ...; bài viết này xin trình bày phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi để giải một số bài toán đếm, ý tưởng chung của phương pháp này là thiết lập hệ thức truy hồi giữa phép đếm cần tính S_n *với* $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots$ *từ đó suy ra* S_n.

Trước hết ta xét ví dụ mở đầu sau.

A. VÍ DỤ MỞ ĐẦU

Bài 1. (HSG – VT – 2009 – 2010)

Cho số nguyên dương n. Gọi M_n là tập các số tự nhiên (viết trong hệ thập phân) có n chữ số, các chữ số lớn hơn 1 và không có hai chữ số cùng nhỏ hơn 7 đứng liền nhau. Tính số phần tử của tập M_n.

Lời giải:

Kí hiệu $u_n = |M_n|$, Gọi X_n, Y_n lần lượt là tập các số tự nhiên theo thứ tự : Có chữ số tận cùng nhỏ hơn 7 và các số có tận cùng lớn hơn 6.

Ta có: $M_n = X_n \cup Y_n, X_n \cap Y_n = \varnothing$.

Lấy một phần tử của M_{n+1}, bỏ đi phần tử cuối cùng ta được một phần tử của M_n.

Ngược lại, xét một phần tử x của M_n.

- Nếu x có tận cùng nhỏ hơn 7 thì có một cách thêm chữ số 0 vào vị trí đầu ta được một phần tử của X_{n+1} và có đúng 3 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của Y_{n+1}.
- Nếu x có tận cùng lớn hơn 6 thì thì có 5 cách thêm vào chữ số cuối để để tạo ra một phần tử của X_{n+1} và có 3 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của Y_{n+1}.

Vậy : $\begin{cases} |X_{n+1}| = |X_n| + 5|Y_n| \\ |Y_{n+1}| = 3|X_n| + 3|Y_n| \end{cases}$

$$\Rightarrow |M_{n+1}| = 4\left(|X_n| + |Y_n|\right) + 4|Y_n| = 4\left(|X_n| + |Y_n|\right) + 12\left(|X_{n-1}| + |Y_{n-1}|\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 4u_n + 12u_{n-1}, n \geq 2$$

Từ đó tìm được $u_n = \frac{1}{2}\left(15.6^{n-1} + (-2)^{n-1}\right) \Rightarrow |M_n| = \frac{1}{2}\left(15.6^{n-1} + (-2)^{n-1}\right)$.

Nhận xét:

- Số có n chữ số viết trong hệ thập phân có thể có chữ số đầu là những số 0
- Cần xây dựng được dãy các mối quan hệ giữa X_n với X_{n+1} & Y_{n+1}; Y_n với X_{n+1} & Y_{n+1}
- Cần phải có khả năng trong việc gọi X_n, Y_n để xây dựng hệ thức truy hồi
- Bài toán đếm số phần tử mà có biến n chưa cụ thể ta thường sử dụng phương pháp này
- Phải chăng chỉ có duy nhất cách gọi X_n, Y_n như trên?

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Bài 2. (Romania 2003)

Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số được lập từ các chữ số $\{2,3,7,9\}$ và chia hết cho 3.

Lời giải:

Gọi M_n là tập hợp gồm tất cả các số có n chữ số được lập từ các chữ số $\{2,3,7,9\}$
Gọi A_n, B_n, C_n lần lượt là tập hợp gồm tất cả các số có n chữ số mà chia cho 3 được dư là 0, 1, 2.
Khi đó ta có $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n, A_n \cap B_n = \varnothing, B_n \cap C_n = \varnothing, A_n \cap C_n = \varnothing$
$\Rightarrow |M_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$
Lấy một phần tử thuộc vào M_{n+1}, bỏ đi phần tử cuối cùng ta được phần tử thuộc M_n
Với $x \in M_n$ ta có

- Nếu $x \equiv 0 \pmod 3$ hay $x \in A_n$ thì 2 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc A_{n+1}, có 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc B_{n+1}, có 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc C_{n+1}.
- Nếu $x \equiv 1 \pmod 3$ hay $x \in A_n$ thì 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc A_{n+1}, có 2 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc B_{n+1}, có 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc C_{n+1}.
- Nếu $x \equiv 2 \pmod 3$ hay $x \in A_n$ thì 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc A_{n+1}, có 1 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc B_{n+1}, có 2 cách thêm vào chữ số cuối để được phần tử thuộc C_{n+1}.

Vậy ta có hệ $\begin{cases} |A_{n+1}| = 2|A_n| + |B_n| + |C_n| \\ |B_{n+1}| = |A_n| + 2|B_n| + |C_n| \\ |C_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + 2|C_n| \end{cases}$

$\Rightarrow |M_{n+1}| = 4|M_n| = ... = 4^n.|M_1|$

Ta có

$M_1 = 4 \Rightarrow |M_{n+1}| = 4^{n+1} \Rightarrow |M_n| = 4^n \Rightarrow |A_{n+1}| = 4^n + |A_n| = 4^n + 4^{n-1} + ... + 4^1 + |A_1|$

Có $|A_1| = 2 \Rightarrow |A_n| = 2 + \left(4 + 4^2 + ... + 4^{n-1}\right) = 2 + 4.\dfrac{4^{n-1} - 1}{3} = \dfrac{4^n + 2}{3}$

Nhận xét:

- Lời giải trên cũng giúp ta tìm được các số…chia 3 dư 1; dư 2.

Bài 3. (THTT 5/2010)

Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số sao cho trong mỗi số đó đều chứa một số lẻ các chữ số 1 và một số chẵn các chữ số 2 (n là một số nguyên dương cho trước)?

Lời giải:

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu M_n là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5, và $A_n;B_n;C_n;D_n$ là tập các số tự nhiên có n chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5 theo tứ tự chứa một số lẻ các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số lẻ các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và chẵn các chữ số 2, chứa một số chẵn các chữ số 1 và lẻ các chữ số 2.

Dễ thấy A_n, B_n, C_n, D_n đôi một rời nhau và $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n$, $|A_n| = |B_n| = |C_n| = |D_n| = \dfrac{1}{4}|M_n| = \dfrac{5^n}{4}$.

Lấy một phần tử của M_{n+1}, bỏ đi phần tử cuối ta được một phần tử của M_n, ngược lại lấy một phần tử x của M_n

- Nếu $x \in A_n$ thì có 3 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.
- Nếu $x \in B_n$ thì có 1 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.
- Nếu $x \in C_n$ thì có 1 cách thêm vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.
- Nếu $x \in D_n$ thì không có cách thêm nào vào chữ số cuối để tạo ra một phần tử của A_{n+1}.

Vậy $|A_{n+1}| = 3|A_n| + |B_n| + |C_n| = |A_n| + \left(|A_n| + |B_n| + |C_n| + |D_n|\right) = |A_n| + 5^n$

Từ $|A_1| = 1, |A_{n+1}| = |A_n| + 5^n \Rightarrow |A_{n+1}| = |A_1| + 5 + 5^2 + ... + 5^n = \dfrac{5^{n+1} - 1}{4} \Rightarrow |A_n| = \dfrac{5^n - 1}{4}$

Bài 4.

Từ các số 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà mỗi chữ số đó đều chia hết cho 3(n là số nguyên dương cho trước)?

Lời giải:

Gọi M_n là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các số 3, 4, 5, 6 và A_n, B_n, C_n lần lượt là các tập con của M_n mà chia cho 3 có số dư là 0, 1, 2.

Ta có $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$, và $A_n \cap B_n = B_n \cap C_n = C_n \cap A_n = \varnothing$.

Lấy một phần tử của M_{n+1}, bỏ đi phần tử cuối ta được một phần tử của M_n, ngược lại lấy một phần tử x của M_n.

- Nếu $x \in A_n$ thì có 2 cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của A_{n+1} và một cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của B_{n+1}, C_{n+1}.
- Nếu $x \in B_n$ thì có 2 cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của B_{n+1} và có và một cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của A_{n+1}, C_{n+1}.
- Nếu $x \in C_n$ thì có 2 cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của C_{n+1} và có và một cách thêm vào chữ số cuối để được một phần tử của A_{n+1}, B_{n+1}.
- Vậy ta có hệ $\begin{cases} |A_{n+1}| = 2|A_n| + |B_n| + |C_n| \\ |B_{n+1}| = |A_n| + 2|B_n| + |C_n| \\ |C_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + 2|C_n| \end{cases}$

Từ đó ta có $|M_{n+1}| = |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| = 4\left(|A_n| + |B_n| + |C_n|\right) = 4|M_n|$

Mà $M_1 = 2 \Rightarrow |M_{n+1}| = 4^{n+1} \Rightarrow |M_n| = 4^n \Rightarrow |A_{n+1}| = |A_n| + 4^n$

Từ đó tính được $|A_n| = \dfrac{4^n + 2}{3}$.

Bài 5.

Có n người ngồi thành một hàng ngang vào n chiếc ghế. Hỏi có bao nhiêu cách lập hàng mới cho n người đó mà trong mỗi cách lập hàng mới: mỗi người hoặc giữ nguyên vị trí của mình, hoặc đổi chỗ cho người liền bên trái, hoặc đổi chỗ cho người liền bên phải.

Lời giải:

Đánh số thứ tự vị trí các ghế từ trái qua phải là 1, 2, 3, …, n

Gọi S_n là số cách lập hàng mới cho n người thỏa mãn đề bài.

Dễ thấy $S_1 = 1$, $S_2 = 2$.

Với $n \geq 3$: Xét một cách lập hàng mới thỏa mãn điều kiện. Có hai loại hàng được lập:

Loại 1: Người ở vị trí số 1 giữ nguyên vị trí. Rõ ràng số hàng được lập loại này là

S_{n-1} cách.

Loại 2: Người ở vị trí số 1 đổi chỗ, khi đó người ở vị trí số 1 chỉ có thể xếp vào vị trí số 2 và người ở vị trí 2 phải chuyển sang vị trí 1. Số hàng loại này là S_{n-2}.

Từ đó ta có $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, $n \geq 3$.

Vậy: $S_1 = 1, S_2 = 2, S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 6 (Trung quốc 1989)

Có thể nào chia được 1989 điểm thành 30 nhóm có cỡ của các nhóm đó không bằng nhau để cho số các tập hợp gồm 3 điểm mà mỗi điểm được chọn từ 3 nhóm khác nhau là lớn nhất.

Lời giải:

Giả sử các cỡ của 30 nhóm là. $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{30}$
Ta sẽ gọi nhóm có cỡ a_k vắn tắt là nhóm k.
Giả sử $a_k \leq a_{k+1} - 3$
Khi đó xét việc thay a_k bởi $a_k + 1$ và a_{k+1} bởi $a_{k+1} - 1$ ta vẫn còn được các nhóm có cỡ không bằng nhau. Số tất cả các bộ ba mà không có phần tử nào thuộc nhóm k hoặc k + 1 thì không bị ảnh hưởng, chỉ có các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k hoặc k + 1 bị. Nhưng số các bộ ba có đúng một phần tử thuộc nhóm k và một phần tử thuộc nhóm k + 1 tăng lên, bởi vì $a_k a_{k+1} < (a_k + 1)(a_{k+1} - 1)$
Như thế khoảng trống lớn nhất là 2.
Giả sử có hai khoảng trống độ dài là 2. Ta giả sử $a_j + 1 < a_{j+1} < a_k < a_{k+1} - 1$
Bây giờ ta có thể thay a_j và a_{k+1} bởi $a_j + 1$ và $a_{k+1} - 1$.
Lập luận giống như trước số các bộ ba cũng tăng lên.
Vậy có nhiều lắm là hai khoảng trống độ dài 2.
Điều này chỉ đủ cho ta xác định các cỡ. Giả sử các cỡ tạo thành một dãy đơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1. Nếu thành phần đầu tiên là n thì thành phần sau cùng là n + 29. và tổng là $\frac{30(2n+29)}{2}$. Nhưng tổng này không thể bằng 1989 vì 1989 không là bội của 5.
Do đó ta giả sử các cỡ tạo thành một dãy dơn giản có tất cả các khoảng trống bằng 1. ngoại trừ một thành phần bị bỏ qua, để có một khoảng trống bằng 2.Nếu thành phần đầu tiên là v và thành phần bị bỏ qua là m thì ta có:

$$\frac{30(2n+29)}{2}-m=1989$$

Nếu $n \le 50$ thì $m \le 2015-1989=26$, số này quá nhỏ vì ta phải có m giữa n và n + 30

Nếu $n \ge 52$ thì $m \ge 2077-1989=88$, số này quá lớn.

Vậy n = 51 và m = 57

Suy ra các cỡ là: 51, 52, 56, 58, 59, 60, ...81.

Bài 7 (Dự tuyển IMO lần thứ 38) :

Trong thành phố a có n cô gái và n chàng trai và các cô gái đều quen biết các chàng trai. Trong thành phố B có n cô gái $g_1;g_2;...;g_n$ và 2n – 1 chàng trai $b_1;b_2;...;b_{2n-1}$. Các cô gái g_i chỉ quen các chành trai $b_1;b_2;...;b_{2i-1}$ và không quen biết các chàng trai khác.

Kí hiệu A(r), B(r) lần lượt là số các cách thức khác nhau để r cô gái từ thành phố A và thành phố B có thể khiêu vũ với r chàng trai từ chính thành phố của họ tạo thành r cặp, mỗi cô gái với một chàng trai mà cô ấy quen biết.

Chứng minh rằng A(r) = B(r).

Lời giải:

Ta kí hiệu A(r) và B(r) bởi A(n, r) và B(n, r)

Ta có thể chọn r cô gái trong n cô gái của thành phố A bằng C_n^r cách

Ta có thể chọn r chàng trai trong n chàng trai của thành phố A bằng C_n^r cách

Vì mỗi cô gái trong A đều quen với các chàng trai nên bất kì nhóm nào gồm r cô gái được chọn ra đều có thể xếp cặp với r chàng trai nên ta có

$$A(n,r)=C_n^r.C_n^r.r!=C_n^r.\frac{n!}{(n-r)!}$$

Cho n ≥ 3 và 2 < r < 3 . Xét mọi cách chọn r cặp bạn khiêu vũ trong B sao cho mỗi cô gái đều quen biết bạn nhảy của mình. Có hai trường hợp để chọn lựa.

Nếu một trong các cô gái đang khiêu vũ là g_n thì r – 1 cô gái kia có thể chọn bạn nhảy bằng

B(n – 1, r – 1) cách. Khi đó g_n có thể chọn bất kì người nào trong (2n – 1) – (r – 1) chàng trai bởi vì cô gái ý quen biết tất cả 2n – 1 chàng trai. Do vậy tổng số cách chọn trong trường hợp này là

$$(2n – r).B(n – 1, r – 1)$$

Giả sử không có cô gái g_n nào cả. Để ý rằng điều này không xảy ra nếu n = r nên $r \le n-1$. Bây giờ mọi cô gái trong các cô $g_1;g_2;...;g_{n-1}$ đều có thể chọn bạn nhảy mà các cô quen biết bằng B(n – 1, r) cách.

Từ đó ta có đẳng thức sau với mọi n ≥ 3:

B(n, r) = B(n – 1, r) + (2n – r).B(n – 1, r – 1) với r = 2, ...n – 1

và B(n, n) = n. B(n – 1, r – 1)

Ta cũng thấy rằng A(n, k) cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi tương tự.

Vì A(n, 1) = B(n , 1) = n^2 với mọi n và A(2, 2) = B(2, 2) = 2

nên A(n, r) = B(n, r) với mọi n ≥ 1 và r = 1, 2, ...n.
Do đó: A(r) = B(r).

Bài 8 (IMO – 1967)

Trong một cuộc đấu thể thao tổng số huy chương là m được phát trong n ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất người ta phát một huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại.
Trong ngày thứ hai người ta phát hai huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Trong các ngày tiếp theo được tiếp tục và phát tương tự nhu thế. Ngày sau cùng còn lại n huy chương. để phát. Hỏi có bao nhiêu huy chương được thưởng và đã phát trong bao nhiêu ngày?

Lời giải:

Giả sử số huy chương còn lại khi bắt đầu ngày thi đấu thứ r là m_r. Khi đó $m_1 = m; m_n = n$

và với mọi k < n ta có: $\dfrac{6(m_k - k)}{7} = m_{k+1}$

Biến đổi và rút gọn ta có:

$$m = 1 + 2.\frac{7}{6} + 3.\left(\frac{7}{6}\right)^2 + ... + n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

hay $m = 36\left[1 - (n+1)\left(\frac{7}{6}\right)^n + n\left(\frac{7}{6}\right)^{n+1}\right] = 36 + (n-6)\dfrac{7^n}{6^{n-1}}$

Do 6 và 7nguyên tố cùng nhau nên 6^{n-1} phải chia hết n – 6
Nhưng lại có $6^{n-1} > n - 6$ nên n = 6 và m = 36
Vậy có 36 huy chương và phát trong 6 ngày.

Bài 9 (VMO 1990 – bảng A)

Các em nhỏ của một lớp đứng thành vòng tròn chơi chò chia kẹo. Cô giáo cho mỗi em một số chẵn chiếc kẹo.Một em nào đó đưa nửa số kẹo của mình cho bạn ở ngay bên tay phải mình. Tiếp đó em vừa nhận được kẹo của bạn xong cũng làm như thế nếu số kẹo của mình là số chẵn , còn nếu là số lẻ thì nhận được một chiếc kẹo của cô trước khi đưa cho bạn. Các em cứ đưa kẹo như thế theo vòng tròn.Chứng minh rằng sẽ dẫn đến trường hợp là có một em đưa một nủa số kẹo của mình không phải cho bạn mà là cho cô giáo thì khi đó số kẹo của mỗi em đều bằng nhau.

Lời giải:

Giả sử hai học sinh A và B đứng liền nhau theo thứ tự chuyển kẹo. Xét thời điểm thứ n khi A đang chuyển x_n chiếc kẹo cho B và giữ lại a_n chiếc kẹo mà B chưa nhận kẹo.

lúc đó giả sử số kẹo mà A và B đang giữ là a_n, b_n. Gọi M_n, T_n theo thứ tự là số kẹo lớn nhất và số kẹo nhỏ nhất của mọi học sinh tại thời điểm thứ n không tính đến x_n.

Tại thời điểm thứ n + 1 khi B đang chuyển số kẹo x_{n+1} cho người tiếp theo thì số kẹo của B theo giả thiết là: $b_{n+1} = x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{b_n + x_n}{2}, \\ \dfrac{b_n + x_n + 1}{2} \end{cases}$

Lúc đó người đứng tiếp sau B chưa nhận kẹo và số kẹo của mọi người trừ B ra không đổi so với thời điểm thứ n (*)

Nếu $a_n = x_n = b_n$ thì $b_{n+1} = a_n = b_n$ nên theo (*) thì $M_{n+1} = M_n$, và $T_{n+1} = T_n$,

Nếu $a_n = x_n \neq b_n$ ta xét riêng M_{n+1} và T_{n+1}

Xét M_{n+1} có $b_{n+1} \le \dfrac{x_n + b_n + 1}{2} \le \dfrac{M_n + M_n + 1}{2} = M_n + \dfrac{1}{2}$

Do M_n và b_{n+1} đều là số nguyên thì $b_{n+1} \le M_n$. Từ đó và (*) suy ra: $M_{n+1} \le M_n$,

Vậy dãy (M_n) là dãy tự nhiên không tăng.

Xét T_{n+1} nếu $x_n < b_n$ thì $b_n \ge x_n + 1 = a_n + 1 \ge T_n + 1$; nếu $x_n > b_n$ thì $x_n \ge b_n + 1 = a_n + 1 \ge T_n + 1$

Vậy ta có $b_{n+1} \ge \dfrac{x_n + b_n}{2} \ge \dfrac{T_n + T_n + 1}{2} = T_n + \dfrac{1}{2}$

Do T_n và b_{n+1} đều là số nguyên thì $b_{n+1} \ge T_n + 1$. Từ đó và (*) suy ra hoặc $T_{n+1} > T_n$, nếu ở thời điểm thứ n chỉ có duy nhất một số $b_n = T_n$ hoặc $T_{n+1} = T_n$, nếu có ít nhất một học sinh khác B có số kẹo là T_n.

Vậy dãy (T_n) là dãy tự nhiên không giảm, hơn nữa khi $b_n = T_n < a_n$ thì đến thời điểm thứ

n + 1 có $b_{n+1} \ge T_n + 1$ nên số T_n sẽ mất đi một lần, và cứ tiếp tục chuyển kẹo sau hữu hạn lần thì số T_n mất hết hết nghĩa là dãy (T_n) tăng thực sự .

Do dãy (M_n) là dãy tự nhiên không tăng còn dãy (T_n) là dãy tự nhiên không giảm và có lúc tăng thực sự nên đến một thời điểm nào đó phải có $M_k = T_k$, lúc đó số kẹo của mọi học sinh đều như nhau.

Bài 10 (VMO – 2002)

Cho tập S gồm tất cả số nguyên trong đoạn: [1; 2002]. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập X thuộc T kí hiệu m(X) là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt $m = \dfrac{\sum m(X)}{|T|}$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T. Tìm m.

Lời giải:

Với mỗi k thuộc {1, 2, ..., 2002} đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T mà $|X| = k$

Xét số a bất kì thuộc tập S. Dễ thấy a có mặt trong C_{2001}^{k} tập X thuộc T mà $|X| = k$

Suy ra: $k.m_k = (1+2+3+...+2002)C_{2001}^{k-1} = 1001.2003.C_{2001}^{k-1}$

nên $\sum m(X) = \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001.2003.\sum_{k=1}^{2002} \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} = \frac{2003}{2}.\sum_{k=1}^{2002} C_{2002}^{k} = \frac{2003.(2^{2002}-1)}{2}$

Vì $|T| = 2^{2002} - 1$ nên $m = \left(\frac{\sum m(X)}{|T|}\right) = \frac{2003}{2}$

Bài 11:

Xếp n học sinh ngồi quanh một bàn tròn. Ngăn hàng đề có tất cả m loại đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi?

Lời giải:

Gọi S_n là số cách phát đề cho học sinh sao cho không có 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau có cùng đề thi.

Cố định một học sinh làm vị trí đầu tiên và các học sinh bên tay phải của học sinh đó là vị trí thứ 2, thứ 3, …, thứ n.(học sinh ở vị trí thứ n ngồi cạnh học sinh ở vị trí thứ nhất)

Ta thấy:

+) Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ n – 1 có đề thi khác nhau thì sẽ có m – 2 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n.

+) Nếu học sinh ở vị trí thứ nhất và học sinh ở vị trí thứ n – 1 có đề thi giống nhau thì có m – 1 cách phát đề cho học sinh ở vị trí thứ n.

Do đó ta có hệ thức: $S_n = (m-2)S_{n-1} + (m-1)S_{n-2}$, $(n \geq 4)$

Sử dụng phương pháp sai phân để tính S_n. Xét phương trình đặc trưng:

$$x^2 - (m-2)x - (m-1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = m-1$$

$$S_n = a(-1)^n + b(m-1)^n$$

Do $S_2 = m(m-1)$, $S_3 = m(m-1)(m-2)$, suy ra:

$a + b(m-1)^2 = m(m-1)$ và $-a + b(m-1)^3 = m(m-1)(m-2)$

Do đó: a = m – 1 và b = 1

Vậy $S_n = (m-1)(-1)^n + (m-1)^n$ $(n \geq 2)$

Bài 12 (IMO – 2011):

Giả sử n > 0 là một số nguyên. Cho một cái cân đĩa và n quả cân có trọng lượng $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân mỗi một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để đảm bảo đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái . Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên rồi đặt nó lên đĩa bên phải, hoặc đĩa bên trái, cho đến khi tất cả các quả cân đều được đặt lên đĩa. Hỏi có bao nhiêu cách để thực hiện việc đặt cân theo đúng mục đích đề ra?

Lời giải:

Gọi Sn là số cách thực hiện việc đặt n quả cân lên đĩa thỏa mãn yêu cầu đề ra.Xét cách đặt n + 1 quả cân có trọng lượng $2^0, 2^1, ..., 2^n$.

Do $2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$ nên trong mọi cách đặt cân thỏa mãn thì quả cân có trọng lượng 2^n luôn được đặt ở đĩa cân bên trái.

Nếu quả cân 2^n được chọn để đặt cuối cùng (chỉ có một cách đặt, vì quả 2^n chỉ đặt lên đĩa bên trái) và số cách đặt n quả cân còn lại là S_n.

Nếu quả cân 2^n được đặt ở bước thứ i (i = 1, 2, …, n). Do có n cách chọn i, và trong trường hợp này quả cân có trọng lượng 2^{n-1} có 2 cách đặt (đặt lên đĩa bên phải hay đĩa bên trái đều thỏa mãn) , do đó số cách đặt n + 1 quả cân trong trường hợp này là $2nS_n$. Vậy ta có hệ thức truy hồi $S_{n+1} = 2nS_n + S_n = (2n+1)S_n$

Ta có $S_1 = 1$ nên $S_n = (2n-1)(2n-3)...3.1$

Bài 13:

Cho A = {1, 2, …, 2n}. Một tập con của A được gọi là tốt nếu nó có đúng hai phần tử x, y và $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $\{A_1, A_2, …, A_n\}$ thoả mãn điều kiện A_i là tập con tốt với mọi i = 1, 2, …, n và $A_1 \cup A_2 \cup … \cup A_n = A$.

Lời giải:

Từ giả thiết, ta sẽ viết lại bài toán như sau (các bạn tự kiểm tra tính tương đương của bài toán này so với bài ban đầu): “Cho 1 hình chữ nhật kích thước 2×n được chia thành các ô vuông đơn vị. Đánh số các ô từ trái qua phải là 1, 2, ..., n (hàng 1) và n + 1, n + 2, .., 2n (hàng 2) Lát chúng bằng các quân domino 1×2 sao cho chúng phủ kín hình chữ nhật và không có 2 quân nào đè lên nhau. Ngoài ra, với n lẻ, ta được bổ sung thêm 1 quân domino "đặc biệt" có thể phủ kín 2 ô n và n + 1. Đếm số cách lát thỏa mãn đề bài”.
Với bài toán này, xét S_n là số cách lát thỏa mãn đề bài với hình chữ nhật kích thước 2×n. Ta sẽ tìm cách xây dựng công thức truy hồi cho S_n
Giả sử ta đã lát được hình chữ nhật 2×(n + 1) bằng các quân domino. Xét quân domino phủ lên ô vuông n. Có 3 khả năng xảy ra:
1/ Quân domino đó phủ lên 2 ô: $(n, 2n)$. Rõ ràng phần còn lại là 1 hình chữ nhật kích thước 2×n, và số cách lát trong tình huống này là S_n
2/ Quân domino đó phủ lên 2 ô (n, n + 1) . Như vậy, buộc phải có 1 quân domino phủ lên 2 ô (2n – 1, 2n) và khi đó, phần còn lại là 1 hình chữ nhật kích thước 2×(n – 1). Tức số cách lát trong tình huống này là S_{n-1}

3/ Quân domino đó phủ lên 2 ô (n, n + 1) (với n lẻ). Khi đó, phần còn lại chỉ có thể lát được bằng các quân domino nằm ngang (nếu có 1 quân domino nào nằm dọc thì nó sẽ chia hình chữ nhật thành 2 phần, mỗi phần có 1 số lẻ ô chưa được lát (do quân domino "đặc biệt" gây ra))
Tức trong trường hợp này chỉ có 1 cách lát duy nhất
Như vậy ta xây dựng được công thức truy hồi như sau: $S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-2} - 1$
(lưu ý rằng khi n chẵn thì không có quân domino "đặc biệt" nên phải bớt đi 1 cách của S_{2k-1})
$S_{2k+1} = S_{2k} + S_{2k-1}$ (lập luận tương tự với quân domino "đặc biệt")
Và bằng quy nạp ta sẽ thu được $S_{2k} = F_{2k}, S_{2k+1} = F_{2k+1} + 1$, trong đó F_k là số Fibonacci thứ k của dãy Fibonacci được xác định bởi công thức
$F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Cuối cùng ta được công thức tổng quát :

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1-(-1)^n}{2}$$

Bài 14:

Cho tập hợp S = {1, 2, 3, …, n}. Tìm số cách chia tập *S* thành 3 tập con khác rỗng sao cho mỗi tập con không chứa hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải:

Kí hiệu S(n) là số cách chia tập S thành 3 tập con không chứa khác rỗng mà bất kì tập con nào cũng không chứa 2 phần tử liên tiếp nhau
Ta sẽ tìm cách tính S(n + 1) theo S(n)
Giả sử ta đã chia được 3 tập con và tổng số phần tử của chúng là n. Bổ sung thêm phần tử n + 1. Sẽ có 2 khả năng xảy ra:

– Khả năng 1: n + 1 không tạo thành 1 tập con mới (tức tập chứa n + 1 có ít nhất 1 phần tử khác)
Khi đó, rõ ràng ta có 2 cách bổ sung n + 1 (vào 1 trong 2 tập không chứa n). Vậy số cách xây dựng tập con trong trường hợp này là 2S(n)
– Khả năng 2: n + 1 tạo thành 1 tập con mới. Khi đó, n số từ 1 đến n phải nằm trong 2 tập hợp còn lại. Có thể thấy ngay chỉ có 1 cách chia thỏa mãn (1 tập chứa các số chẵn và tập còn lại chứa các số lẻ). Do đó, số cách trong trường hợp này là 1 cách

Vậy ta thu được công thức truy hồi S(n + 1) = 2S(n) + 1

Mặt khác, kiểm tra trực tiếp ta có S(3) = 1, nên :
$S(n+1) = 2S(n) + 1 \leftrightarrow S(n+1) + 1 = 2(S(n)+1) \rightarrow S(n+1) + 1 = 2^{n-1}$
Như vậy, số cách chia tập hợp thỏa mãn đề bài là $S(n) = 2^{n-2} - 1,\ S(1) = S(2) = 0$

Bài 15:

Cho A và E là 2 đỉnh đối tâm của 1 hình bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ A. Tại bất cứ đỉnh nào trừ E, con ếch có thể tới một trong 2 đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại. Tính số cách để ếch nhảy từ A tới E mất đúng n bước (n>4).

Lời giải:

Gọi a_n là số cách để ếch nhảy từ A đến E mất đúng n bước.(n>4)

Dễ thấy $a_{2n-1} = 0$, $n \geq 1$ (vì để nhảy từ A tới E cần một số chẵn bước nhảy).

Sau 2 bước nhảy, ếch chỉ có thể đên B hoặc C hoặc trở về A.

Do đó: $a_{2n} = 2(a_{2n-2} + b_{2n-2})$, trong đó: b_n là số cách nhảy để ếch nhảy từ B(hoặc C) đến E mất đúng n bước.

Từ B (hoặc C), sau 2 bước nhảy ếch chỉ có thể trở về B hoặc đến A (do n>4).

Suy ra:$b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{n-2}$

Từ 2 hệ thức truy hồi trên ta suy ra: $a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-4}$

Giải hệ thức trên suy ra $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right]$.

C. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. (VMO – 1997): n đường tròn chia mặt phẳng làm bao nhiêu phần nếu bất cứ cặp đường tròn nào cũng có hai điểm chung và không có 3 đường tròn nào có điểm chung.

2. (Estonia 2007): Xét lưới ô vuông 10×10. Với mỗi nước đi ta tô màu hình vuông đơn vị nằm ở giao của 2 hàng và 2 cột. Một nước đi là hợp lệ nếu ít nhất 1 trong 4 hình vuông này trước đó không được tô. Hỏi số nước đi lớn nhất có thể để tô toàn bộ lưới ô vuông là bao nhiêu?

3. Cho các số $k, n \in \mathbb{N}^*$ và n > 3. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu n đỉnh của đa giác lồi đó bằng k mầu sao cho trong mỗi cách tô không có hai đỉnh kề nhau nào cùng được tô một màu.

4. Có bao nhiêu cách chia n cái kẹo cho k em bé (k < n) sao cho mỗi em bé có ít nhất một cái kẹo.

5. Các số 1, 2, 3, ..., n (n > 4) được viết liên tiếp trên một vòng tròn. Hai số không kề nhau được gọi là liên thông nếu một trong hai cung tạo bởi chúng chứa toàn số bé hơn chúng. Tìm số cặp liên thông.